702. D’Amore B. (2009). Matematica, stupore e poesia. In: D’Amore B., Sbaragli S. (eds.) (2009). *Pratiche matematiche e didattiche in aula*. Atti del Convegno Nazionale “Incontri con la matematica” n. 23. Castel San Pietro Terme, 6-7-8 novembre 2009. Bologna: Pitagora. Pag. 268. ISBN: 88-371-1779-6. 11-18.

Matematica, stupore e poesia[1]

Bruno D’Amore
NRD - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna
MESCUD - Università Distrital di Bogotà

Abstract. *There are unquestionable bonds between theories that attempt to give explanations both to literature and mathematics; this proves that aesthetic experiences cannot be banished only to the former but are integral part also of the latter.*

Nel 1942 venne pubblicato *Theory of Literature* di René Wellek ed Austin Warren (Welleck, Warren, 1942). Si tratta del primo vero manuale critico moderno della letteratura, cui oggi tutti gli studiosi fanno riferimento; la critica letteraria ha fatto passi da gigante, nella seconda metà del XX secolo, ma quello resta un punto di partenza per tutti, una vera e propria pietra miliare.
Il primo capitolo, preliminare, si intitola *Essenza della letteratura*; in esso, gli Autori si chiedono: Che cosa è la letteratura? E che cosa non è? Qual è la sua essenza? Come definire lo specifico letterario?
Molte sono le ipotesi di risposta, alcune delle quali, spero, sorprendenti:
«Letteratura è ogni cosa data alle stampe»; ma questa risposta volutamente un po’ banale genera problemi a non finire, facilmente immaginabili;
«Tutti i grandi libri della storia umana»; ma esiste un canone cui fare riferimento?; e poi i “grandi libri” potrebbero essere di genere non letterario, come gli *Elementi* di Euclide o l’*Enciclopedia* di Boezio o la *Critica della Ragion Pura*; e poi, siamo così certi di voler escludere i “libri minori”?; e come definirli?;
il termine *letteratura* viene allora proposto limitatamente alle sole “forme artistiche della scrittura”, cioè alla letteratura di fantasia.

[1] Questo testo è l’adattamento di un breve brano tratto dal libro: D’Amore B. (2009). *Matematica, stupore e poesia*. Con interventi di: Claudio Bartocci, Umberto Bottazzini, Ubiratan D’Ambrosio, Michele Emmer, Sandro Graffi, Giorgio Israel, Gabriele Lolli, Piergiorgio Odifreddi e Luis Radford. Firenze: Giunti. Si ringrazia l’Editore per la gentile concessione.

Dopo varie altre proposte, tutte discusse criticamente dai due stessi Autori, si giunge alla seguente affermazione, che sembra essere più una rinuncia che una conquista: «Un fatto almeno dovrebbe risultar chiaro, e cioè che un'opera d'arte letteraria non è un semplice oggetto, ma piuttosto una assai complessa e stratificata organizzazione, con molteplici rapporti e significati».
Quando un bambino legge per la prima volta la storia di Pinocchio, sa che quel che ha in mano "non è un semplice oggetto, ma piuttosto una assai complessa e stratificata organizzazione, con molteplici rapporti e significati"?

Se così è per la definizione di letteratura, non miglior sorte spetta a quella di matematica. Risparmiamoci le facezie dei vocabolari delle lingue, e puntiamo su personaggi che non destano sospetto alcuno.
Ecco come il grande logico, storico, filosofo, premio Nobel della Letteratura (appunto!) Bertrand Russell (1872 - 1970) definisce la matematica:
Matematica è quella scienza in cui non si sa ciò di cui si parla né si sa se quel che si dice è vero o falso.
Certo, appare chiaro che NON si tratta di una vera e propria definizione, eppure… Eppure molto di vero in questa affermazione c'è, tanto che dovremo riprenderla poi, più avanti, ben due volte, quando si saranno chiariti alcuni concetti preliminari.
Per ora, accettiamo semplicemente il fatto che, così come la letteratura ha difficoltà a lasciarsi definire, la matematica non è da meno.
Chi pensa che la matematica si identifichi con calcoli, conti, misure…, semplicemente basandosi sull'esperienza scolastica giovanile, potrebbe restare sorpreso da quel che leggerà in seguito.
Ora, tra i letterati ed i poeti, qualcuno mostra poca simpatia per la matematica, come Gustave Flaubert (1821 - 1880) il quale, nel *Dizionario dei luoghi comuni* (Flaubert, 1980), a p. 80, seccamente asserisce: «Matematiche. Inaridiscono il cuore».
Così, Giacomo Leopardi (1798 - 1837), nello *Zibaldone* (247-248), composto dal 1817 al 1832: «Perciò la matematica, la quale misura quando il piacer nostro non vuol misura, definisce e circoscrive quando il piacer nostro non vuol confini (…), analizza quando il piacer nostro non vuole analisi né cognizione esatta della cosa piacevole (…), la matematica, dico, dev'essere necessariamente l'opposto del piacere».
Da dove, personaggi di così straordinaria grandezza ricavino simili convinzioni, resta per me un mistero; vorrei almeno che avesse albergato in loro un dubbio; mai, io, matematico, direi che la poesia intristisce il cuore, solo per aver letto *E come potevamo noi cantare*, o *Sei nella terra fredda sei nella terra negra*, o *Né più mai rivedrò le sacre sponde*; quanto meno avrei il dubbio che la poesia nasconda dell'altro e non solo strazianti grida di dolore…
Se Gustave e Giacomo hanno sofferto l'apprendimento della matematica senza giungere a possederne il senso creativo, bello, significativo, almeno che

abbiano il dubbio dell'ignorante critico: una sola cosa so (di matematica), di nulla sapere, prima di criticare quel che non si conosce.
Fortunatamente non così è per tutti.
A parte le facili citazioni di letterati e poeti che lodano la matematica e danno in essa dimostrazione di competenza, mi piace ricordare la parole del grande poeta Isidore Lucien Ducasse (1846 - 1870) Conte di Lautréamont, pseudonimo con il quale scriveva i suoi versi, nei suoi *Canti di Maldoror*: «Aritmetica! Algebra! Geometria! Grandiosa trinità! Luminoso triangolo! Colui che non vi ha conosciute è un insensato! Meriterebbe la prova dei massimi supplizi; (…) ma colui che vi conosce e vi apprezza non vuole più nulla dei beni della terra; si accontenta dei vostri magici piaceri (…)» (Lautréamont, 1968, p. 103).[2]
Vi sono poi i giudizi estetici sui prodotti del genio umano; mentre è così naturale usarli nel campo della musica, della pittura, della danza, del teatro, del cinema,… cosa sulla quale peraltro sarebbe necessario procedere con cautele assolutamente maggiori, diventa problematico per molti quando l'oggetto di discorso è la matematica.
Eppure, per un matematico, il giudizio di tipo estetico è del tutto naturale; se due colleghi di dipartimento si incontrano nel bar a piano terra o in ascensore o in biblioteca, non è infrequente sentire l'uno dire all'altro, mostrando un foglio pieno di formule manoscritte leggibili e decifrabili solo da pochi intimi: «Guarda che *bel* teorema ho dimostrato», oppure: «Guarda che dimostrazione *elegante*». "Bello", "elegante", non "utile" o "difficile" o altro. L'eleganza è parte integrante, fondamentale, della matematica.
Come ho già ricordato, c'è chi ha proposto premi di eleganza agli enunciati matematici più belli prodotti nei secoli; uno di questi è senza dubbio il teorema di Pitagora, più o meno noto al grande pubblico come segue:
In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sulla ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti.
Semplice, corretto, denso, armonioso, laconico,… eppure contenente tutte le informazioni necessarie.
Così scrive la poetessa Wisława Szymborska: «Non ho difficoltà a immaginare un'antologia dei più bei frammenti della poesia mondiale in cui trovasse posto anche il teorema di Pitagora. Li c'è (…) una grazia che non a tutti i poeti è stata concessa» (Szymborska, 2006).[3]
E che cosa direbbe il Lettore se, al posto della parola "quadrato" sostituissimo la parola "triangolo equilatero"? Ne verrebbe:
In un triangolo rettangolo, il triangolo equilatero costruito sulla ipotenusa è equiesteso alla somma dei triangoli equilateri costruiti sui cateti.

[2] Citato anche in Bartocci (2006, p. VII), che raccomando come lettura a tutti, amici o nemici della matematica.
[3] Citato anche in Bartocci (2006, p. XXVIII).

Non è più il teorema di Pitagora studiato a scuola; ma vale lo stesso? Cioè: è ancora un teorema? Cioè: se ne può trovare una dimostrazione?
La risposta è positiva; non solo, ma si può sostituire alla parola quadrato, anche pentagono regolare, esagono regolare,... Per cui il teorema si può estendere a qualsiasi genere di poligono regolare.
E ancora, si può usare il cerchio o, per far venire più elegante la figura, il semicerchio:
In un triangolo rettangolo, il semicerchio che ha come diametro l'ipotenusa è equiesteso alla somma dei semicerchi che hanno come diametri i cateti.
Io propendo per dare la palma della eleganza al seguente teorema, assai più recente, il cosiddetto "teorema fondamentale dell'algebra", dimostrato in generale da Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) nel 1799:
Una equazione algebrica di grado n ha n radici in C.
L'armonia di questa affermazione, quella n che si ripete e che chiude mezzo millennio di storia dell'algebra, ha un potenziale di sottile e raffinata eleganza che ti da una ebbrezza simile alla prima volta che vedi *Guernica*, immensa, vera, stupendamente potente, di fronte a te, al "Reina Sofia" di Madrid; ti senti gelare il sangue nelle vene, senti che lì, di fronte a te, c'è tutta la genialità dell'Autore. Chi ha creato *Guernica* è genio universale, ha saputo cogliere l'assurdità e l'ingiusta violenza gratuita della guerra, dando quindi all'essere umano un'occasione unica di riflessione e di conforto; così, chi ha creato questa frase matematica ha còlto l'essenza della mistica bellezza fredda ed austera della matematica: se l'equazione ha grado n, le radici non sono 3, o 27, o la metà di n o n-1, sono proprio n, a costo di doverne contare una più volte.
Certo, ci sono altre proposte, ma il sogno di chi qui scrive è che ora, spinto da questi due esempi, il Lettore (finalmente!) sia indotto a rivangare nella sua mente… Impossibile che sia sempre rimasto esteticamente insensibile a tutto quel che di matematica ha visto nel corso dei suoi studi.
Per esempio, in matematica ci sono successioni bellissime, operazioni straordinariamente attraenti, algoritmi stupefacenti, formule stupende.
Andiamo con ordine, con vari esempi.

Successioni bellissime
Nei primi anni del XIII secolo, Leonardo figlio di Bonaccio il Pisano, detto Bighello (1180 circa – 1250 circa), scrive un capolavoro dell'aritmetica medioevale, *Liber Abaci*, e ne fa realizzare varie copie a mano da distribuire tra i colti ed i potenti dell'epoca.
A parte le operazioni ivi contenute, l'uso delle cifre indiano-arabe, la presenza di zero, non proprio ancora come cifra, però almeno come segno, l'uso di un sistema posizionale a base dieci per contrastare la numerazione romana oramai in fase rapida di declino, lega il suo nome ad una successione, la "successione di Fibonacci".
Un allevatore di conigli ha una coppia di conigli, maschio e femmina; il mese dopo sono ancora troppo piccoli per accoppiarsi e procreare, dunque al

secondo mese quell'allevatore ha ancora una sola coppia di conigli; ma nel mese successivo, il terzo, i due procreano una coppia di conigli, ancora maschio e femmina, e dunque al terzo mese egli possiede due coppie di conigli; nel mese successivo, la vecchia coppia produce ancora una coppia di conigli maschio e femmina e così via, mese dopo mese, mentre la nuova coppia è troppo giovane per procreare, lo farà solo dopo due mesi, ma poi sempre, di mese in mese, e sempre maschio e femmina.
Ebbene: dopo un anno, quante coppie di conigli vi saranno nell'allevamento?
Sì, sì, lo sento già il Lettore protestare: Ma chi lo dice che nascono sempre maschio e femmina, ma i conigli muoiono, ma… Lo invito ad entrare nel magico mondo della matematica, un mondo nel quale si fanno *ipotesi* e su quelle si lavora, lasciando poi il compito di verificare la realtà di quel che si è ottenuto ad altri. La domanda non è una domanda *reale*, è una domanda *matematica*: in queste ipotesi, quante coppie vi saranno dopo un anno?
E così si scopre che, per esempio, a gennaio c'è una sola coppia, così come a febbraio; mentre a marzo le coppie sono già 2; ad aprile oltre a queste 2, ce ne sarà una terza, quella generata dalla prima coppia; se si continua a ragionare così, si trova la famosa successione: 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144…
Quel che si è scoperto solo assai dopo, è che l'ipotesi di Fibonacci, che si applica solo teoricamente alle coppie di conigli, vale però per tutte o quasi le manifestazioni della natura, nella crescita dei semi di girasole, delle foglie di un ramo d'albero, dei piccoli germogli di un cavolfiore e così via; tanto che questa successione, così bella ed elegante, ha ispirato artisti famosi ed una successione di Fibonacci appare oggi nel Beaubourg di Parigi, una opera di Mario Merz (1925 - 2003), lo stesso che ha realizzato altre opere basate su questa successione sulla Mole Antonelliana di Torino, o lungo le scale del Guggenheim Museum di New York.
Non credo, però qualche Lettore potrebbe non approvare il mio riferimento a tale successione con gli aggettivi "bella" ed "elegante"; forse solo perché non ne ha colto l'intima struttura, cioè la regola costitutiva… O forse tutti i Lettori l'hanno còlta al volo… Ebbene, prima di rivelarlo… Anche questo fatto è una delle magìe estetiche della matematica, quando si scopre che dietro una definizione, accanto ad una dichiarazione, vicino ad una esibizione, si nasconde una regola semplice e completa. In questo caso è la seguente: a parte i primi due valori iniziali (1 ed 1), tutti gli altri sono ottenuti come somma dei due precedenti. Una formulazione semplice, elegante e veritiera. Tale regola non vale solo per i primi 20 passi, vale *per sempre*, e questa pure è una caratteristica della matematica, la sua universalità.

Operazioni straordinariamente attraenti

Certo, certo, a scuola uno studia l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'elevamento a potenza, la estrazione di radice quadrata, il logaritmo, al più la derivata e l'integrale… Ma se uno riflette bene, di operazioni se ne possono inventare quante se ne vogliono. Anche senza

scomodare classi numeriche complicate e solo limitandoci ai numeri naturali, di operazioni ce ne sono infinite (no, non è un modo di dire, è la verità; ma come fare a farlo capire al Lettore?; solo per infastidirlo un po' e obbligarlo a fantasticare, dovrei dire che, siccome nell'insieme N dei numeri naturali ci sono infiniti numeri, allora le operazioni definibili in N sono… più che infinite; ma temo che i competenti ridano a crepapelle per il modo barbaro in cui dico la cosa, mentre chi non sa queste cose, dirà che sono matto; preferisco allora chiudere qua).
Mi sto limitando alle operazioni binarie usuali, per non complicare la vita a nessuno.
Chiunque di noi può ideare, creare, una infinità di operazioni diverse, anche lontane da quelle usuali che si studiano a scuola.

Per esempio:
a op b = ab (i numerali a e b vengono semplicemente scritti l'uno di seguito all'altro);
esempio numerico: 3 op 17 = 317;
invece di "op" si potrebbe inventare un simbolo qualsiasi, per esempio: ₪; si avrebbe allora la scrittura: 3₪17=317;
₪ è una operazione che trasforma due numeri naturali in un altro numero naturale scritto con tutte le cifre nell'ordine in cui appaiono; ancora un esempio, per capire meglio: 12₪7034=127034.
La possiamo chiamare come ci pare, per esempio: operazione *appiccicanumeri*.
Il Lettore raffinato e curioso può verificare quali delle usuali proprietà aritmetiche valgono o non valgono per questa interessante operazione appiccicanumeri; vediamo solo due esempi:
la proprietà commutativa *non vale*: infatti, per esempio: 35₪7=357, mentre 7₪35=735; e 357≠753;
la proprietà associativa vale; infatti, per esempio:
34₪(2₪19)=34₪(219)=34219; così: (34₪2)₪19=342₪19=34219.

Ora possiamo sbizzarrirci ed inventare tutte le operazioni che vogliamo:

a ult b = b;
esempio: 31 op 167 = 167;

a sec b = *aaaaa*… (a ripetuto, scritto b volte);
esempio: 3 sec 7 = 3333333;

a iperelevato alla b (che si scrive ^{b}a) cioè a elevato a sé stesso scrivendo a per b volte;

esempio: ${}^{7}3$ vale 3 alla 3 alla 3… dove 3 appare scritto 7 volte: $3^{3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}}}$; se uno pensa che 3^3 fa 27, immagini che razza di valore rappresenta ${}^{7}3$, un numero immenso.

E così via; ciascuno di noi può creare la operazione che vuole, studiarne le proprietà, con fantasia e immaginazione, darle il proprio nome, inventarsi un simbolo… Chi l'ha detto che le operazioni sono solo quelle della scuola?

Algoritmi stupefacenti

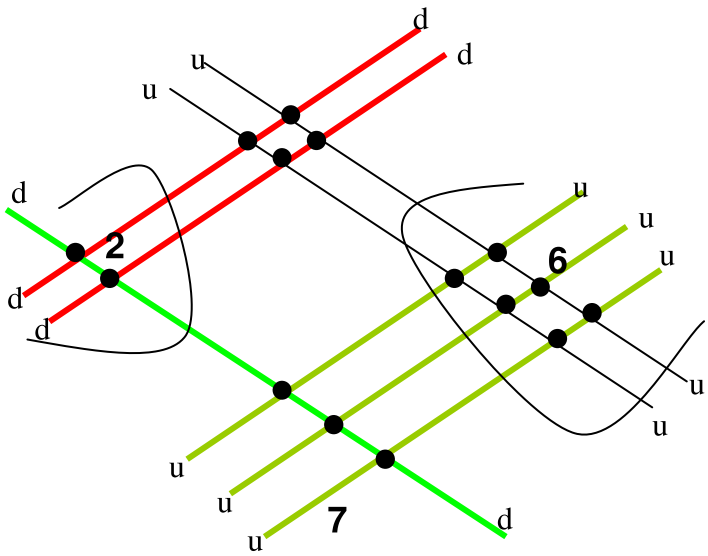
Noi tutti abbiamo imparato ad eseguire alcuni algoritmi elementari, soprattutto di tipo aritmetico; chi di noi non sa eseguire addizioni, sottrazioni o moltiplicazioni in colonna? Forse qualcuno ha dimenticato come eseguire le divisioni, visto che questo algoritmo è un po' più complicato degli altri e dunque richiede vari passaggi (fortunatamente per tutti, esiste la macchina calcolatrice, perfino nel cellulare…).

Ma molti finiscono con il credere che ogni algoritmo appreso a scuola sia unico, universale, eterno; ma non è così.

Per esempio, è ben noto il metodo medioevale, detto "scacchiera" o "fulminea", diffuso in Europa già ai tempi di Dante Alighieri (1265 – 1321); esso venne vietato a favore del buon vecchio metodo romano, quello basato sulla numerazione romana che, non essendo posizionale, non poteva permettere l'esecuzione di algoritmi per come li intendiamo noi, ma doveva far necessariamente ricorso a macchine apposite, gli abachi o abaci nei quali si usavano sassolini, detti *calculi*. L'espressione "fare i calcoli" che non avrebbe etimologicamente senso se non si sapesse tutto ciò, resta ancora oggi nella nostra lingua.

Fu una dura e strenua lotta quella che contrappose ancora per qualche secolo gli abacisti, paladini del metodo degli antichi romani, con sassolini, e gli algoritmisti, portatori del nuovo sistema posizionale, con lo zero e i calcoli fatti a mano con carta e calamaio.

Ovviamente, a storie matematiche diverse di civiltà diverse spettano etimologie diverse. Può essere interessante sapere che l'analogo del "fare i calcoli" che si riferisce ai sassolini romani si dice in mandarino cinese "mettere a posto i bastoncini". Perché? Può essere illuminante vedere l'operazione 23×12, con il metodo antico cinese dei bastoncini, così come lo vide usare Marco Polo (1254 - 1324) nei suoi viaggi in Katai, percorrendo la via della seta, alla corte di Kubilai Kan, tra il 1271 ed il 1289.



u = unità
d = decine

23×12=276

Il numero 23 viene rappresentato con cinque bastoncini tutti paralleli: due bastoncini ravvicinati e paralleli (le decine) e poi con tre bastoncini ravvicinati e paralleli (le unità); il numero 12 viene rappresentato con tre bastoncini tutti paralleli, divisi in uno (decine) e due (unità), ma messi in posizione tale da intersecare quelli precedenti. Ora si contano tutti gli incroci; prima quelli di destra, che sono 6 e sono le unità (3 unità per 2 unità fa 6 unità); poi quelli centrali, che sono 7 e sono le decine (2 decina per 2 unità più 3 unità per una decina); infine quelli di sinistra che sono 2 e sono le centinaia (2 decine per una decina).

Indubbiamente, lo studio storico e comparativo degli algoritmi di calcolo delle varie epoche e dei vari Paesi è sorprendente.

Bibliografia

Bartocci C. (2006). *Racconti matematici*. Torino: Einaudi.
Flaubert G. (1980). *Dizionario dei luoghi comuni*. Milano: Adelphi.
Lautréamon (1968). *Opere complete*. Milano: Feltrinelli.
Szymborska W. (2006). *Letture facoltative*. Milano: Adelphi.
Wellek R., Warren A. (1942). *Theory of Literature*. Harmondsworth: Penguin Books. [Trad. it. 1956: Bologna: Il Mulino].

Parole chiave: matematica ed estetica; matematica e letteratura; matematica e poesia